

LABORATORIET FOR BYGNINGSMATERIALER

LIDT OM KOMPOSITMATERIALER

L. FUGLSANG NIELSEN

THE TECHNICAL UNIVERSITY OF DENMARK
BUILDING MATERIALS LABORATORY



LIDT OM KOMPOSITMATERIALER

L. Fuglsang Nielsen

Laboratoriet for Bygningsmaterialer
Danmarks tekniske Højskole

Marts 1979

F O R O R D

Det foreliggende kompendium er udarbejdet med det formål at dække den del af Laboratoriet for Bygningsmaterialer's "Grundkursus i Bygningsmateriallære", der omhandler kompositmaterialer. Da kurset (nr. 6101) omfatter mange discipliner indenfor materiallæren, er det ikke mange lektioner, der kan afsættes til behandlingen af sammensatte materialer. Det har derfor været nødvendigt, at begrænse tekstmængden til et omfang, der må betragtes som et minimum, hvis man vil opnå en vis forståelse af kompositmaterialers virkemåde.

Lyngby, marts 1979

L. Fuglsang Nielsen

I denne udgave er enkelte trykfejl og misforståelser rettet. Yderligere er der tilføjet et par figurer og litteraturhenvisninger.

Lyngby, januar 1980

L. Fuglsang Nielsen

Kompendiet indgår i Laboratoriet for Bygningsmaterialer's rapportserie som LBM-rapport 66/79.

INDHOLDSFORTEGNELSE

INDLEDNING	side 1
DEFINITIONER	1
GENERELLE BEMÆRKNINGER	3
ELASTISKE FORHOLD	3
Nogle elasticitetsteoretiske relationer	3
Paul's grænser	4
Hashin-Shtrikman's grænser	5
Eksakte værdier	6
Kuglearmeret materiale	6
Cylinderarmeret materiale	7
Parallelt lamineret materiale	7
Tilnærmede værdier	7
Partikelarmerede materialer	7
Båndmaterialer	10
Partikelmaterialer	11
STYRKEFORHOLD	13
Parallelt fiber-armerede materialer	13
Kornarmerede materialer	18
AFSLUTNING	24
LITTERATUR	25
SUPPLERENDE LITTERATUR	26

INDLEDNING

Materialer, som f.eks. cement- og asfaltbeton, fiberarmeret aluminium, træspånplader og kulstofstål (pearlite i blødt stål) er såkaldte kompositmaterialer - d.v.s. materialer, der er sammensat af to eller flere delmaterialer.

Der kan være flere grunde til, at man benytter kompositmaterialer. En af de væsentligste vil ofte være af økonomisk art: Et dyrt materiales gode egenskaber kan i mange tilfælde nyttiggøres i tilstrækkelig grad ved at blande det op med et væsentligt billigere materiale. Hvor økonomien ikke er afgørende, men vægten af konstruktionsmaterialet, kan det have sine fordele at blande et let, men relativt svagt materiale som f.eks. aluminium med fibre af et betydeligt stærkere materiale.

I læren om kompositmaterialer forsøger man beregningsmæssigt at gøre disse materialer til "enkeltmaterialer" med karakteristiske konstitutive relationer - således at beregning af konstruktioner, hvori de indgår, kan foregå under direkte anvendelse af veletablerede kontinuum-fysiske metoder (som f.eks. de fra den rene mekanik). Det er selvsagt et vigtigt mål indenfor materiallæren, at kunne give ingeniøren de data, som lige netop er nødvendige for at disse metoder kan anvendes fra et så højt niveau som muligt. Det vil for eksempel sige, at den bygningsingeniør, der beregner en betonkonstruktion ikke skal tage sit udgangspunkt i sten og mørtel, når han opstiller betingelserne for fysik, geometri og ligevægt. Hans udgangspunkt er "enkeltmaterialet" beton eller endog jernbeton.

DEFINITIONER

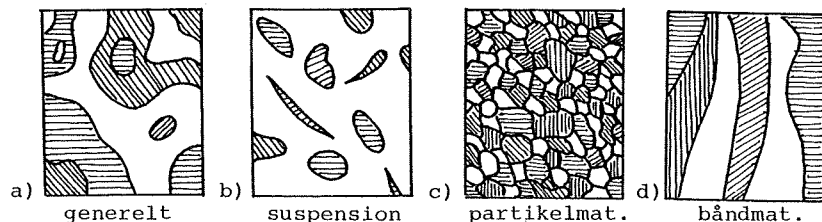
Generelt defineres et *kompositmateriale* som en vilkårlig blanding af en vilkårlig mængde forskellige enkeltmaterialer. Et *enkeltmateriale* er et materiale, hvis fysiske opførsel kan beskrives ved visse konstitutive relationer (som f.eks. Hookes lov) uden kendskab til dets struktur. I relationerne indgår fysiske konstanter (som f.eks. E-modul og Poissonal), der kan bestemmes ved forsøg.

Det område, der i et kompositmateriale optages af et bestemt enkeltmateriale, kaldes en *fase*. Fasens overflade eller begrænsninger til andre faser kaldes *fasegrænsen* og beskrives ved *fase-*

geometrien. En fase kan forekomme i *kontinuert* eller i *diskontinuert (diskret)* form. Tænker vi os en vilkårlig stor terning, skåret ud af kompositmaterialet, kan vi i en kontinuert fase bevæge os fra een side til den modstående side uden at krydse andre faser. Det kan vi ikke i en diskontinuert fase. Generelt vil en fase forekomme i både kontinuert og diskret form, se figur 1a.

Et kompositmateriale, hvor kun den ene fase er kontinuert, kaldes en *suspension* eller et *partikel-armeret* materiale, se figur 1b. Forekommer partiklerne som kompakte korn har vi det *korn-armerede* materiale. Er partiklerne trådagtige har vi det *fiberarmerede* materiale.

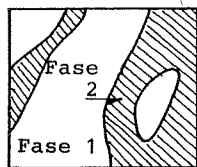
Et kompositmateriale, hvor alle faser er diskontinuerte, kaldes et *partikelmateriale*, se figur 1c. Hvis alle faser er kontinuerte kaldes kompositmaterialet et *båndmateriale*, se figur 1d.



Figur 1

Vigtige praktiske kompositmaterialer er de såkaldte *tokomponent-* eller *tofasematerialer*, der som navnet antyder, kun består af to faser. I den tilsvarende suspension indhyller *matrixen* de isolerede *partikler*.

Det efterfølgende vil udelukkende handle om tokomponentmaterialer. Hyppigt anvendte betegnelser vil være de i tabel 1 angivne. Her betyder *c*, *G*, *K*, *v*, *E*, *σ* og *ε* i rækkefølge: Volumenkoncentration, forskydningsmodul, kompressionsmodul, Poissonantal, Young's modul, spænding og tøjning.



Figur 2

FASE	VOL. V	KONC. V_i/V^x	ELASTICITETSKOEF.				VIRKNINGER	
1	V_1	$\frac{c_1}{1-c}$	G_1	K_1	v_1	E_1	$\sigma_{1,ij}$	$\epsilon_{1,ij}$
2	V_2	$\frac{c_2}{c}$	G_2	K_2	v_2	E_2	$\sigma_{2,ij}$	$\epsilon_{2,ij}$
x=KOMP	$V_1^x + V_2^x$	$\frac{c_1 + c_2}{1}$	G^x	K^x	v^x	E^x	σ_{ij}^x	ϵ_{ij}^x

Tabel 1

GENERELLE BEMÆRKNINGER

At omgøre et kompositmateriale således, at det beregningsmæssigt kan betragtes som et enkeltmateriale, volder i de fleste tilfælde store matematiske problemer - særligt med hensyn til fasegeometriens beskrivelse. Ofte må man i dag søge hjælp i eksperimenter og derefter opstille mere eller mindre empiriske relationer. Som det vil ses i det følgende, er det dog i nogle tilfælde muligt at opstille visse teoretiske rammebetragtninger.

ELASTISKE FORHOLD

Nogle elasticitetsteoretiske relationer

For at have et nødtørftigt grundlag for forståelsen af de næste afsnits omtale af øvre og nedre værdier for et kompositmateriales elasticitetskoefficienter, må vi genkalde nogle enkelte relationer og begreber fra den isotrope elasticitetsteori:

Energitæthed, d.v.s. energi per rumenhed, er bestemt ved

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad (1)$$

hvor spændingen, σ_{ij} har følgende sammenhæng til tøjningen, ϵ_{ij} .

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{ij} + \delta_{ij} \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_{kk} \quad (3)$$

Her er Kronecker's delta betegnet ved δ_{ij} . Efter behag kan elasticitetskoefficienterne *E* og *v* omskrives til *G* og *K* ved hjælp af

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad , \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (4)$$

Under anvendelse af ligningerne 2 og 3 kan energitætheden udtrykkes ved

$$W = - \frac{\nu}{2E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 + \frac{1+\nu}{2E} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) + \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \quad (5)$$

For den rene hydrostatiske tilstand er $\sigma = \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$ og alle øvrige $\sigma_{ij} = 0$. Med ligningerne 5 og 2 bliver energitætheden bestemt ved

$$W = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{K} = \frac{9}{2} K \epsilon^2 \quad (6a,b)$$

hvor den karakteristiske tøjning for den hydrostatisk tilstand er $\epsilon = \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \sigma/(3K)$ og alle andre $\epsilon_{ij} = 0$.

For den rene forskydningstilstand er $\tau = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23}$ og alle andre $\sigma_{ij} = 0$. Energitætheden bestemmes igen ved ligningerne 5 og 2. Resultatet bliver

$$W = \frac{3}{2} \frac{\tau^2}{G} = 6G \epsilon^2 \quad (7a,b)$$

hvor den karakteristiske tøjning for den rene forskydningstilstand er $e = \epsilon_{12} = \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = \tau/(2G)$ og alle andre $\epsilon_{ij} = 0$.

I forbindelse med beregning af et legemes tøjningsenergi skal det erindres, at resultatet - hvis det er baseret på et skønet (men tilladeligt) spændings- eller tøjningsfelt - altid vil være større end eller lig med den korrekte værdi. Dette er minimumsprincippet for tøjningsenergi.

Pauls grænser, (1)

For makrohomogene og -isotrope kompositmaterialer, hvor den eneste fasegeometriske information er volumenandele, kan en øvre værdi og en nedre værdi for elasticitetsmodulerne bestemmes ud fra følgende energibetragninger.

En blok af kompositmaterialet anbringes i den hydrostatisk tilstand σ^x ($= \sigma_{11}^x = \sigma_{22}^x = \sigma_{33}^x$). Et tilladeligt spændingsfelt vil være det, hvor alle punkter i kompositmaterialet har en identisk spændingstilstand. D.v.s. $\sigma_{1,11} = \sigma_{1,22} = \sigma_{1,33} = \sigma_{2,11} = \sigma_{2,22} = \sigma_{2,33} = \sigma^x$ og alle andre $\sigma_{ij} = 0$.

Anvendes minimumsprincippet i forbindelse med ligning 6a fås

$$V^x W^x = V^x \frac{\sigma^x{}^2}{2K^x} \leq V_1 \int \frac{\sigma^x{}^2}{2K_1} dV + V_2 \int \frac{\sigma^x{}^2}{2K_2} dV \quad (8)$$

der, idet σ^x er konstant gennem volumenet, giver den nedre værdi for kompositmaterialets kompressionsmodul

$$K_n^x = (c_1/K_1 + c_2/K_2)^{-1} \quad (9)$$

hvor c_i er de i tabel 1 definerede volumenkoncentrationer.

Anvender vi i stedet et tilladeligt tøjningsfelt som værende det, der virker på helheden, nemlig ϵ^x ($= \epsilon_{11}^x = \epsilon_{22}^x = \epsilon_{33}^x$), giver minimumsprincippet i forbindelse med ligning 6b relationen

$$V^x W^x = V^x \frac{9K^x \epsilon^x{}^2}{2} \leq V_1 \int \frac{9K_1 \epsilon^x{}^2}{2} dV + V_2 \int \frac{9K_2 \epsilon^x{}^2}{2} dV \quad (10)$$

der med ϵ^x som konstant giver den øvre værdi for K^x .

$$K_\phi^x = c_1 K_1 + c_2 K_2 \quad (11)$$

Sammenskrevet bliver

$$\left(\frac{c_1}{K_1} + \frac{c_2}{K_2}\right)^{-1} \leq K^x \leq c_1 K_1 + c_2 K_2 \quad (12)$$

På ganske tilsvarende måde udledes grænserne for G^x . Vi får

$$\left(\frac{c_1}{G_1} + \frac{c_2}{G_2}\right)^{-1} \leq G^x \leq c_1 G_1 + c_2 G_2 \quad (13)$$

Ved hjælp af omskrivningerne i ligning 4 kan grænserne for de øvrige elasticitetskoefficienter bestemmes af ligningerne 12 og 13. Specielt for $v_1 = v_2$ bliver

$$\left(\frac{c_1}{E_1} + \frac{c_2}{E_2}\right)^{-1} \leq E^x \leq c_1 E_1 + c_2 E_2 \quad (14)$$

På en lidt kortere form kan lign. 14 skrives

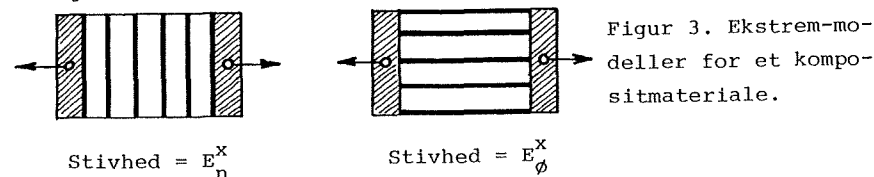
$$\frac{n}{n - c(n-1)} \leq \frac{E^x}{E_1} \leq 1 + (n-1)c \quad , (c = c_2) \quad (15)$$

hvor stivhedsforholdet med fase 1 som referencemateriale er defineret ved

$$n = E_2/E_1 \quad (16)$$

Ved $v_1 = v_2$ gælder ligning 15 også for K^x og G^x . E skal blot ombyttes med K henholdsvis G - også i ligning 16. I figurerne 4 og 5 er grænserne sammenlignet med forsøgsresultater.

På grundlag af ekstrem-model-betragninger er grænserne i udtrykket 15 også udviklet af Hansen (27). Modellerne er vist i figur 3.



Hashin-Shtrikman's grænser, (2)

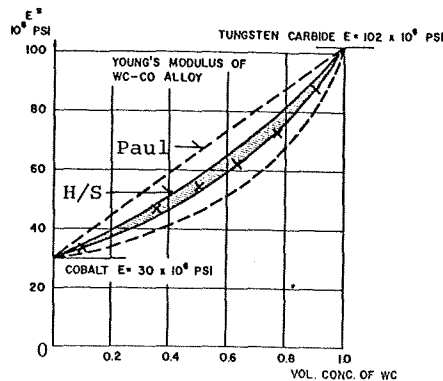
Ved et mere raffineret skøn af spændings- og tøjningsfelter kan

Pauls grænser forbedres betydeligt. Indenfor forudsætningerne om makrohomogenitet og -isotropi er de optimale grænser udviklet af Hashin-Shtrikman. For $\nu_1 = \nu_2 = 0.2$ bliver

$$n \frac{2-c+nc}{c+n(2-c)} \leq \frac{E^x}{E_1} \leq \frac{1-c+n(1+c)}{1+c+n(1-c)}, \quad (n \leq 1) \quad (17)$$

For $n > 1$ vendes ulighedstegnene. For $\nu_1 = \nu_2 = 0.2$ gælder udtrykket også for K^x og G^x . E skal blot erstattes med K henholdsvis G.

H/S-grænserne og Paul's grænser er sammenlignet i figurerne 4 og 5.



Figur 4. E-modulen for WC-Co legering (værktøjsmetal). Eksperimentelle værdier efter Hashin (3).

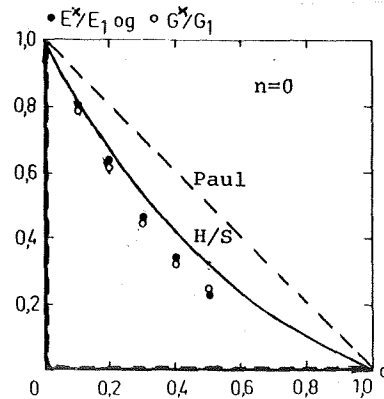
Eksakte værdier

Som allerede antydnet har man kun i yderst få tilfælde været i stand til på rent teoretisk grundlag, at bestemme et kompositmaterials elasticitetskoefficienter.

Kugle-armeret materiale:

Dette materiale er et specielt korn-armeret materiale. Kornene er kugleformede og således graduerede, at de kan lejres så tæt, at der ikke efterlades hulrum imellem dem. I kompositmaterialet er de placeret således, at de hver for sig er omgivet af en så stor kugleskal af matrixmateriale, at partikkelkoncentrationen her er identisk med den, der gælder for det samlede kompositmateriale.

For dette materiale (der regnes makrohomogent og -isotrop) er kompressionsmodulen bestemt eksakt (5). For $\nu_1 = \nu_2 = 0.2$ bliver



Figur 5. Porøsitetens indflydelse på E- og G-modulen for sammensintret pulver af Al_2O_3 . Eksperimentelle værdier efter Coble og Kingery (4).

$$\frac{K^x}{K_1} = 1 + \frac{c(K_2/K_1 - 1)}{1 + \frac{1}{2}(1-c)(K_2/K_1 - 1)} = \frac{1-c+(1+c)K_2/K_1}{1+c+(1-c)K_2/K_1} \quad (18)$$

Bemærk ligheden med højresiden i ligning 17.

Cylinderarmeret materiale:

Dette materiale er et parallelt fiberarmeret materiale med uendeligt lange fibre. Dets geometri er defineret derved, at tværsnittet vinkelret på fibrene er den plane analog til det kuglearmerede materiales geometri. For dette materiale er alle fem elasticitetskoefficienter bestemt eksakt (6) - undtagen Youngmodulen vinkelret på fibrene. For begge Poissonantal lige store bliver Youngmodulen parallelt med fibrene identisk med Pauls øvre grænse, d.v.s.

$$\frac{E^x}{E_1} = 1 + (n-1)c \quad (19)$$

Parallelt laminerede materialer:

Dette er materialer, opbygget som krydsfiner, blot regnes faserne homogene og isotrope.

Også her er der fundet eksakte værdier for elasticitetskoefficienter. For begge Poissonantallige store er E-modulen parallelt med laminaterne identisk med Pauls øvre værdi, d.v.s. givet ved ligning 19. På tværs af laminaterne er E-modulen så tæt ved Pauls nedre grænse, at det ikke tjener noget formål at angive andet, dvs

$$\frac{E^x}{E_1} = \frac{n}{n-c(n-1)} \quad (20)$$

Tilnærmede værdier

Ved hjælp af semiteoretiske, numeriske og empiriske metoder er der i tidens løb opstillet en række udtryk til praktisk bestemmelse af en del kompositmaterialers elasticitetskoefficienter. Vi vil holde os til nogle udtryk, der er bestemt ved de to førstnævnte metoder - og her primært begrænse os til makrohomogene og -isotrope situationer, hvor begge Poissonantal er ca. 0.2. Formlerne udskrives for E^x -modulen, men gælder tilsvarende for K^x og G^x .

Partikelarmerede materialer:

Følgende udtryk er udviklet i (7)

$$\frac{E^x}{E_1} = 1 + \frac{c(n-1)}{1+\gamma(n)(1-c)(n-1)} = \frac{n-\gamma(1/n)(1-c)(n-1)}{1+\gamma(n)(1-c)(n-1)} \quad (21a)$$

Når partiklerne ikke interfererer til en kontinuert fase er funktionen $\gamma(n)$ givet ved følgende udtryk, hvor formparameteren γ_0 kan skønnes ved hjælp af tabel 2.

$$\gamma(n) = 1 - \gamma(1/n) = \frac{\gamma_0 + (1-\gamma_0)n}{1+n}, \quad \frac{1}{2} \leq \gamma_0 \leq 1 \quad (21b)$$

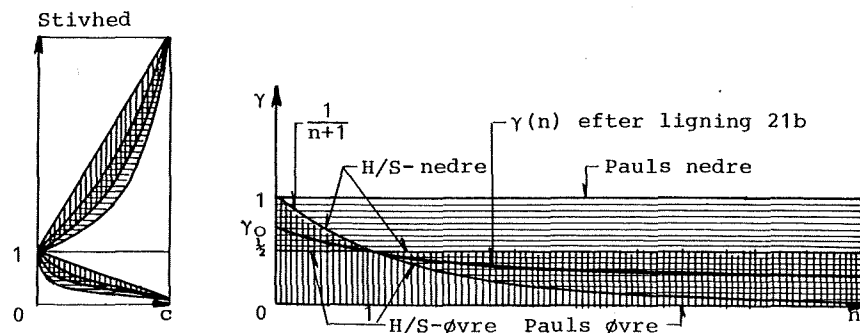
Udtrykket 21a har følgende specielle egenskaber

$$\frac{E^x}{E_1}(n, c) \cdot \frac{E^x}{E_1}\left(\frac{1}{n}, c\right) = 1 \quad (21c)$$

For meget bløde og meget stive partikler fås

$$\frac{E^x}{E_1}(0, c) = \left(\frac{E^x}{E_1}(\infty, c)\right)^{-1} = \frac{1-c}{1+c\gamma_0/(1-\gamma_0)} \quad (21d)$$

Referencefasen er den gennemgående matrixfase. Indflydelsen af partiklernes form styres af faktoren γ , beliggende i det lukkede område $1/(n+1)$ til 0.5, svarende til $\frac{1}{2} \leq \gamma_0 \leq 1$. For disse γ vil lign. 21a give værdier, der ligger mellem eller på H/S-grænserne (lign. 17). Iøvrigt vil alle $0 \leq \gamma \leq 1$ medføre værdier, beliggende mellem eller på Pauls grænser (lign. 15), se figur 6. Dette antyder en mulighed for også at kunne anvende formelen på ikke makroisotrope og -homogene kompositmaterialer. Pauls øvre grænse svarer jo til langsgående fibre eller lamelflader, mens Pauls nedre grænse svarer til tværliggende lamelflader.



Figur 6. Parameteren, γ^s indflydelse på stivhedsbestemmelse efter ligning 21a. Lodret skravering betyder, at den primære orientering af fase 2 er \neq med spændingen. Vandret skravering betyder, at den primære orientering af fase 2 er \perp på spændingen. Overgangszonen med krydsskravering betyder isotropi. Her bestemmes γ ved ligning 21b.

PARTIKELFORM	ρ
Kompakte korn	~ 0.5
Irregulære korn	~ 0.55
Fibre	~ 0.6
Møntformede plader	~ 0.65
Krøllede plader	~ 0.7

Tabel 2. Formparameteren γ_0 i ligningerne 21 skønnes ved

$$\gamma_0 \approx \rho \left(1 + \frac{1-\rho}{2\rho} c\right)$$

hvor ρ er den i tabellen givne formfaktor.

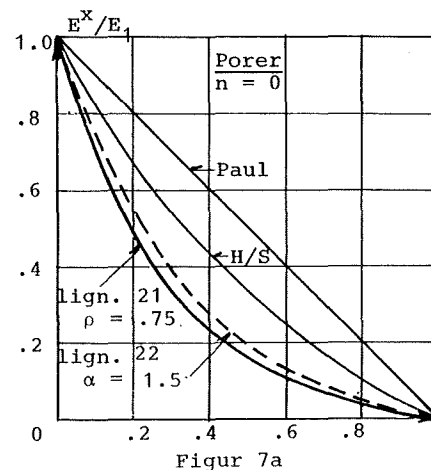
For $\gamma \equiv 0.5$ (kugleformede partikler) kan udtrykket 21 skrives

$$\frac{E^+}{E_1} = \frac{1-c + n(1+c)}{1+c + n(1-c)}$$

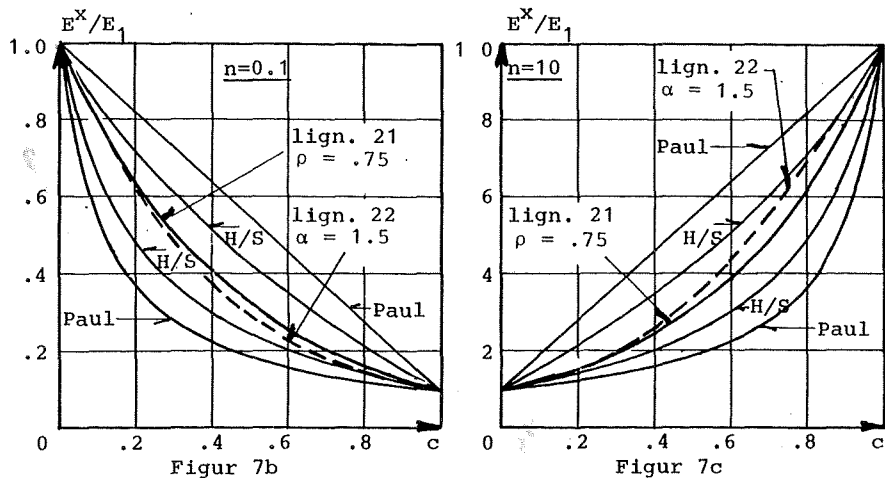
Denne ligning danner udgangspunktet for følgende tilnærmelse, (8)

$$\frac{E^+}{E_1} = \frac{A+n}{1+nA} \quad ; \quad A = \left(\frac{1-c}{1+c}\right)^\alpha \quad (22a)$$

Formfaktoren α er 1 for kugleformede partikler. Jo mere partiklerne afviger fra kugleformen jo større indsættes α . Anvendelsesområdet for udtrykket 22a er bestemt derved, at Hashin-Shtrikman's grænser ikke må forceres. For praktiske fasekombinationer vil dette kun ske i enkelte tilfælde.



Figur 7. Stivhedsmoduler, bestemt ved ligningerne 21 og 22.



Udtrykket 22a har de samme specielle egenskaber som er angivet for ligning 21a. For meget bløde og meget stive partikler fås

$$\frac{E^X}{E_1}(0, c) = \left(\frac{E^X}{E_1}(\infty, c) \right)^{-1} = \left(\frac{1-c}{1+c} \right)^\alpha = A \quad (22b)$$

Båndmaterialer:

Jævnfør definitionsafsnittet er begge faser kontinuerte i et båndmateriale. Hvis fase 2 er uendelig stiv vil kompositmaterialet også være uendeligt stift. Dette tilgodeses (9) ved i følgende tilnærmelse

$$\frac{E^X}{E_1} = 1 + \frac{c(n-1)}{1 + \gamma(n)(1-c)(n-1)} \quad (23a)$$

at sætte

$$\gamma(n) = \frac{\gamma_0}{1 + (2\gamma_0 - 1)n} \quad ; \quad \gamma_0 = \rho \left(1 + \frac{1-\rho}{1.5\rho} c \right) \quad (23b)$$

hvor $\rho < 1$, men større end ca. .55, voksende med fasegeometriens kompleksitet.

Bemærk, at udtrykket 23a er identisk med første del af ligning 21a. Derfor vil en del båndmaterialer og partikelarmerede materialer have tætliggende stivheder for $n < 1$.

Partikelmaterialer:

Sådanne materialers E-modul kan udtrykkes ved Budiansky's formel (10),

$$\frac{E^X}{E_1} = \frac{1}{2} \left\{ (1-n)(1-2c) + \sqrt{[(1-n)(1-2c)]^2 + 4n} \right\} \quad (24a)$$

Udtrykket har den interessante egenskab at repræsentere den "vandrette" middelværdi af Pauls grænser, se figur 8. For ekstreme stivhedsforhold og store partikelkoncentrationer skal formelen, jfr. figur 9, anvendes med nogen forsigtighed.

Udtrykket har følgende specielle egenskaber

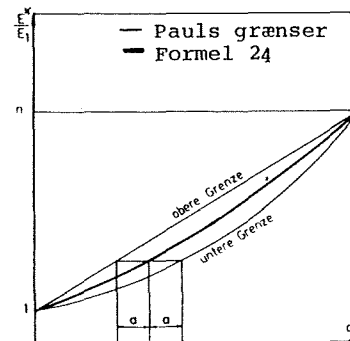
$$\frac{E^+}{E_1}(n, c) \cdot \frac{E^+}{E_1}\left(\frac{1}{n}, c\right) = 1 \quad (24b)$$

samt tillige - på grund af fasesymmetrien

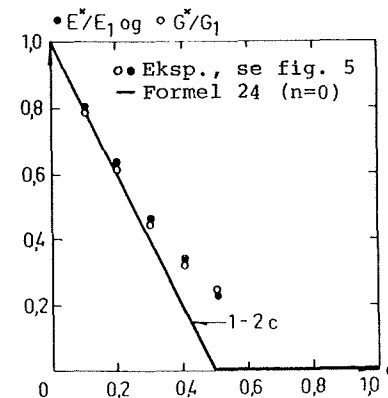
$$\frac{E^+}{E_1}(n, c) = n \cdot \frac{E^+}{E_1}\left(\frac{1}{n}, 1-c\right) \quad (24c)$$

For meget bløde og meget stive partikler bliver

$$\frac{E^+}{E_1}(0, c) = \left(\frac{E^+}{E_1}(\infty, c) \right)^{-1} = \begin{cases} 1-2c & \text{for } c < 0.5 \\ 0 & \text{for } c \geq 0.5 \end{cases} \quad (24d)$$



Figur 8



Figur 9

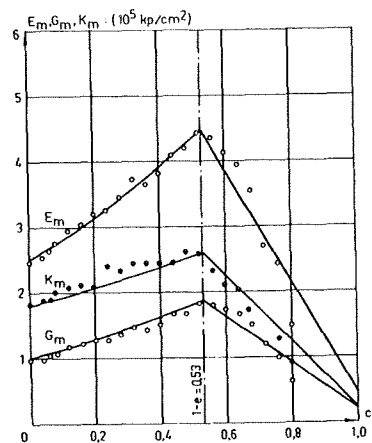
I sin udvikling forudsætter formel 24a, at partiklerne ikke afviger alt for meget fra kugleformen.

En "hurtig" formel, der kan formodes at have samme praktiske gyldighedsområde som udtrykket 24a er følgende, se (11).

$$\frac{E^+}{E_1} = n^C \quad ; \quad (0.1 \lesssim n \lesssim 10) \quad (25)$$

Udtrykket har de samme specielle egenskaber som er angivet i ligningerne 24b og 24c. Figur 10 viser formlens anvendelse på cementmørtel med et varierende indhold af kvartssand. Den gode overensstemmelse antyder, at ligning 25 (og 24a) også for kornarmerede materialer kan være en god tilnærmelse. Omvendt kan ligningerne 21a og 22a i mange tilfælde anvendes på partikelmaterialer.

De faldende værdier i figur 10 skyldes, at kvartskornene er begyndt at røre hinanden (interferere), og at der herefter ikke er cementpasta nok til at udfylde mellemrummene mellem dem. Der opstår således en tredje fase, nemlig luft. Teoretisk tilgodeses dette forhold ved multiplikation af det "tætte" kompositmaterialers E-modul med faktoren $1-2c_h$, hvor $c_h < 0.5$ er luftens volumenkoncentration.



Figur 10. Indflydelse af volumen kvartssand på stivheden af cementmørtel. Eksperimentelle værdier efter (12). Teoretiske efter ligning 25.

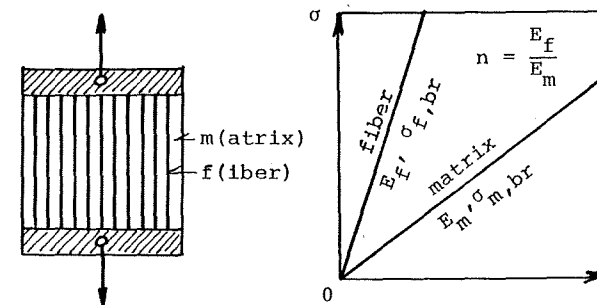
STYRKEFORHOLD

I endnu højere grad end tilfældet er ved stivhedsbestemmelsen, må man ved styrkeberegning af kompositmaterialer støtte sig til semiteoretiske og/eller empiriske metoder. En af grundene er, at den praktisk relevante styrke er den maksimale styrke og ikke f.eks. bæreevnen ved begyndende brud, der (forudsat kendt spændingsfelt) i nogle tilfælde lader sig bestemme relativt enkelt ud fra passende brudkriterier som f.eks. Coulomb's eller Tresca's. Denne bæreevne beløber sig ofte til kun 10-30 % af den endelige styrke.

Den maksimale brudstyrke mobiliseres gennem en successiv nedbrydning af kompositmateriallets faser og fasegrænser (kontaktzoner). I almindelighed vil der herved blive tale om, at man må anvende en så lang række af beregningsmæssigt diskontinuerte modeller (og brudkriterier), at det indtil videre synes umuligt at give en afrundet beskrivelse, der dækker mere end et materiale. Her tænkes på angivelse af tilstrækkeligt tætliggende grænser for grupper af kompositmaterialer.

I det følgende vil vi begrænse os til at gøre nogle betragtninger over styrken af to specifikke typer af kompositmaterialer, nemlig det parallelt fiberarmerede- og det kornarmerede materiale.

Parallelt fiber-armeret materiale (trækpåvirkning):



Figur 11. Fiberarmeret materiale samt fasernes arbejdslinier.

Det antages først, at begge faser er elastiske til adskillelsesbrud ($\sigma_{m,br}, \sigma_{f,br}$). Plane tværsnit antages generelt at forblive plane.

For det perfekt sammenhængende kompositmateriale er E-modulen givet ved ligning 19, d.v.s.

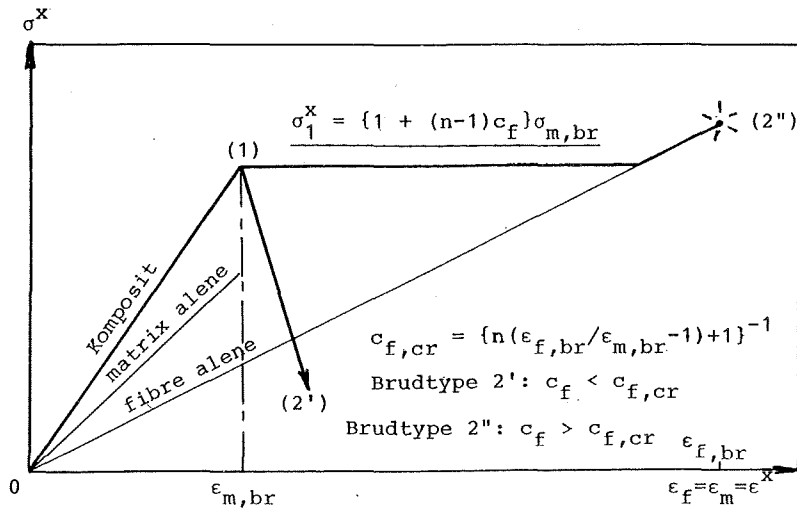
$$\sigma^x = E_{\neq}^x \epsilon^x \quad \text{hvor} \quad E_{\neq}^x = c_f E_f + c_m E_m \quad (26)$$

Fasespændingerne er samtidigt givet ved

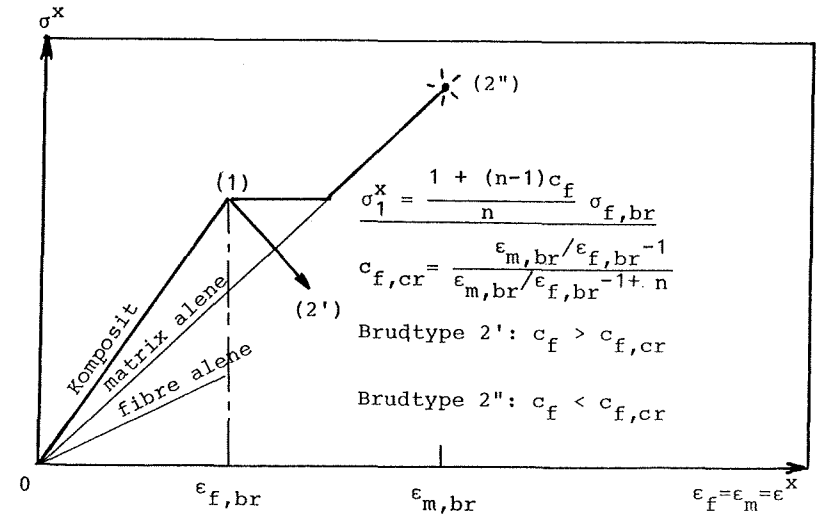
$$\begin{aligned} \sigma_m &= E_m \epsilon^x \\ \sigma_f &= E_f \epsilon^x \end{aligned} \quad \sigma^x = c_f \sigma_f + (1-c_f) \sigma_m \quad (27)$$

Brud af kompositmaterialet indledes med, at enten matrix eller fiber bryder først. Hvilken, afhænger af det indbyrdes størrelsesforhold mellem brudtøjningerne $\epsilon_{m,br} = \sigma_{m,br} / E_m$ og $\epsilon_{f,br} = \sigma_{f,br} / E_f$. Afhængig af brudtøjningens størrelse for den fase, der ikke er brudt i første omgang, er der herefter to muligheder for det endelige brud, se figur 12 og 13. Efter det indledende brud overføres eller forsøges hele lasten overført til den endnu ikke brudte fase. Teoretisk sker dette uendeligt hurtigt. Det delvist brudte kompositmateriales bæreevne er givet ved ligning 26, hvor den brudte fases volumenkoncentration er sat = 0.

Teoretiske arbejdslinier for fiberarmerede materialer er vist i figurerne 12 og 13. Den angivne kritiske fiberkoncentration, $c_{f,cr}$ er den koncentration, for hvilken kompositmaterialets bæreevne er lig den bæreevne, som den sidst brydende fase alene kan mobilisere. Dette svarer til den vandrette sektion af ar-



Figur 12. Fiberarmeret materiale med lineær-elastiske faser. I dette tilfælde bryder matrixen først.



Figur 13. Fiberarmeret materiale med lineær-elastiske faser. I dette tilfælde bryder fibrene først.

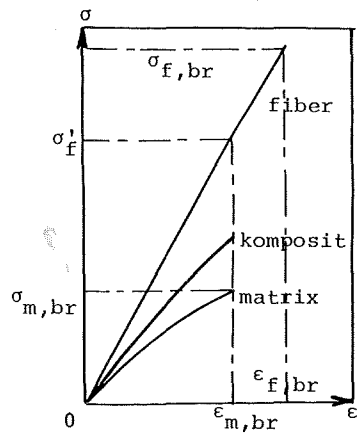
bejdslinierne i figurerne 12 og 13. Bæreevnen σ_1^x er den maksimalt opnåelige, når faserne samtidigt skal bevares intakte. Bemærk iøvrigt, at en eventuel bæreevne større end σ_1^x (dvs 2'') vil være mindre end den bæreevne, som "kompositmaterialet" ville have, hvis det udelukkende bestod af den sidst brydende fase.

Som før nævnt, er ovenstående baseret på at fibrene er parallelle, uendeligt lange - og at de har perfekt vedhæftning til matrixen. Afvigelser fra disse forudsætninger kan ofte (14-16) tilgodeses ved indførelse af passende korrektionsfaktorer på c_f i ligning 26.

Ikke lineær elastiske faser

De foregående betragtninger kan næsten uændrede anvendes på parallelt fiberarmerede materialer, hvor begge faser er ikke-lineær elastiske. Blot må visse analytiske udtryk erstattes med aflæsninger på grafisk givne arbejdslinier.

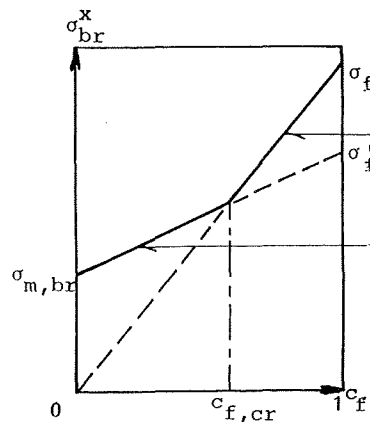
Figurerne 14 og 15 illustrerer bæreevnebestemmelsen for fiberarmerede materialer, hvor matrixen henholdsvis fibrene bryder først. Figurerne 16a og 16b viser resultater fra forsøg på et par praktisk forekommende fiberforstærkede materialer.



Arbejdslinier

$$\epsilon_{f,br} > \epsilon_{m,br}$$

$$\sigma^x = c_f \sigma_f + (1-c_f) \sigma_m$$



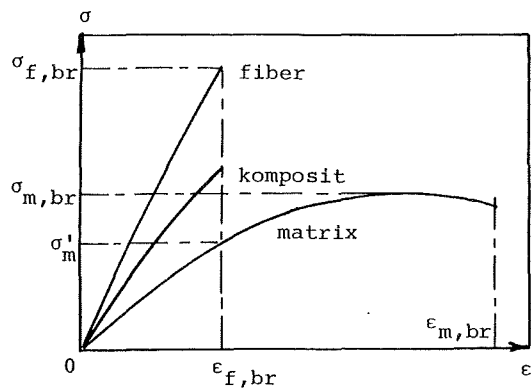
Bæreevne for komposit

$$\sigma_{br}^x = c_f \cdot \sigma_{f,br}$$

$$\sigma_{br}^x = c_f \sigma'_f + (1-c_f) \sigma_{m,br}$$

$$c_{f,cr} = \frac{\sigma_{m,br}}{\sigma_{m,br} + \sigma_{f,br} - \sigma'_f}$$

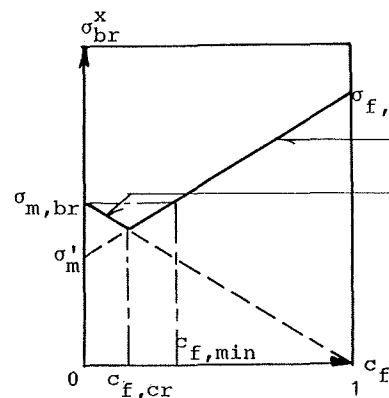
Figur 14. Fiberarmeret materiale med ikke lineær elastiske faser. I dette tilfælde bryder matrixen først. For $c_f > c_{f,cr}$ bærer fibre alene.



Arbejdslinier

$$\epsilon_{f,br} < \epsilon_{m,br}$$

$$\sigma^x = c_f \sigma_f + (1-c_f) \sigma_m$$



Bæreevne for komposit

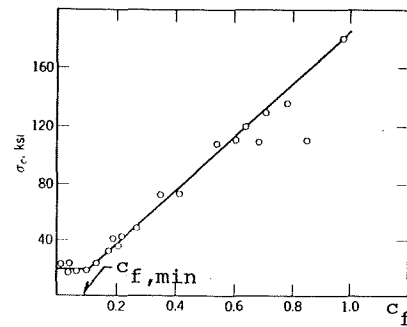
$$\sigma_{br}^x = c_f \sigma_{f,br} + (1-c_f) \sigma'_m$$

$$\sigma_{br}^x = (1-c_f) \sigma_{m,br}$$

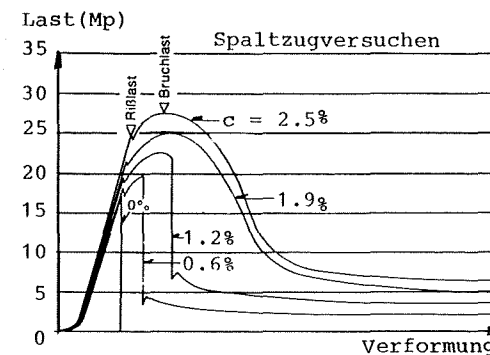
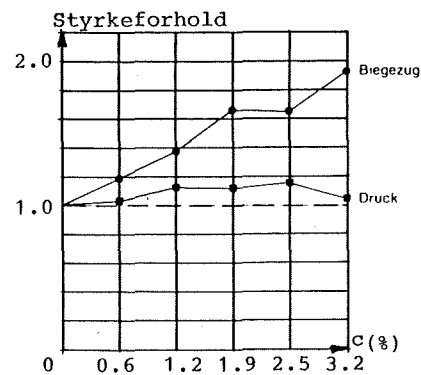
$$c_{f,cr} = \frac{\sigma_{m,br} - \sigma'_m}{\sigma_{f,br} + \sigma_{m,br} - \sigma'_m}$$

$$c_{f,min} = \frac{\sigma_{m,br} - \sigma'_m}{\sigma_{f,br} - \sigma'_m}$$

Figur 15. Fiberarmeret materiale med ikke lineær elastiske faser. I dette tilfælde bryder fibre først. Bemærk, at positiv fibereffekt først optræder for c_f større end $c_{f,min}$. For c_f mindre end $c_{f,cr}$ bærer matrixen alene.



Figur 16a. Effekt af Tungstens fibre på trækstyrken af en Tungstens-Kobber komposit. Fra A. Kelly og W. Tyson (13).

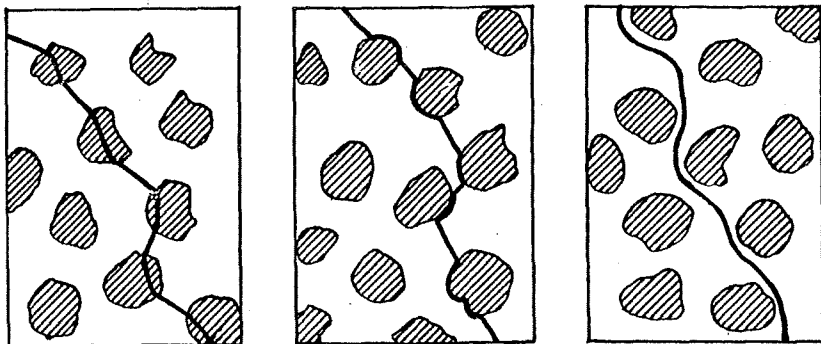


Figur 16b. Resultater fra forsøg med stålfiberarmeret beton. Fibrene er 2.5 cm lange og har en diameter på 0.4 mm. (29).

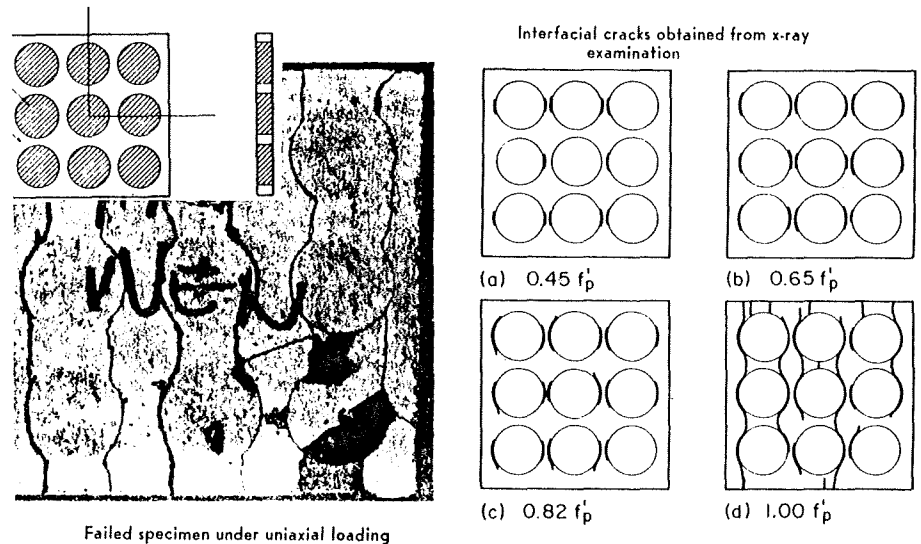
Kornarmerede materialer

I forhold til trækbrud i parallelt fiberarmerede materialer er brud i kornarmerede materialer et temmeligt komplekst problem. De førstnævnte kunne, jfr. figurene 12 til 16, behandles på grundlag af simple spændings-tøjnings antagelser og et enkelt brudkriterium (adskillelsesbrud). Anderledes indviklede er forholdene i kornarmerede materialer. F.eks. er der altid tale om flerdimensionale spændingstilstande. Hertil kommer, at der af forskellige grunde (25,26) meget ofte vil forekomme revner ved kornene - fortrinsvis de store, se (22,26) og figur 19. Yderligere vil de indgående faser plus kontaktzonen ofte have forskellige typer af brudkriterier, der træder i funktion på forskellige tidspunkter. Det vil være helt umuligt her, at give en blot nogenlunde afrundet behandling af emnet. Vi vil kun interessere os for et forhold, der jævner ovenstående, kan have en vis betydning for vurdering af brudforløbets indledende fase i kompositmaterialer med relativt små korn - nemlig spændingerne i og omkring kornene. Tillige vil der blive angivet formler til bestemmelse af gennemsnitsspændingerne i både matrix og korn. Faserne antages at være lineær-elastiske. Fasekontakten regnes perfekt. Hvor intet andet nævnes, forudsættes den ydre spændingstilstand at være enakset.

Som et eksempel vil de angivne formler blive anvendt til bestemmelse af brud i kontaktzonen. Det skal imidlertid gentages, at den dertil svarende bæreevne ikke behøver at være den endelige, idet spændingerne kan overflyttes til mere bæredygtige mekanismer - eller revner og/eller korninterferens kan have umuliggjort, at den nævnte brudmekanisme nogensinde kommer i funktion.

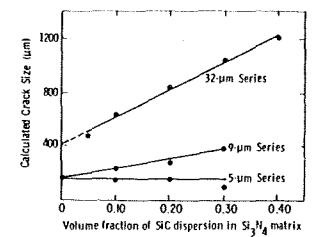


Figur 17. Tre forskellige typer af brudforløb i beton. Fra Nepper Christensen og Nielsen (17).

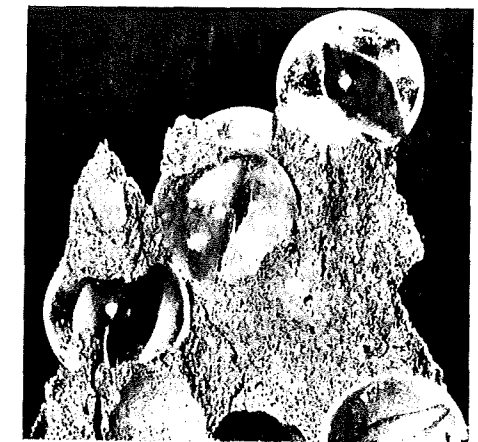


Failed specimen under uniaxial loading

Figur 18. Brud i en plan betonmodel, bestående af cementmørtel og sten. Fra Buyukozturk, Nilson & Slate (18).



Figur 19. Effekt af partikelstørrelse og volumenkoncentration på revnestørrelse i et Si₃N₄-SiC kompositssystem. Fra Lange (22).



Figur 20. Fracture in concrete with uncoated glass marbles; note the cones of mortar adhering to the surface of the marbles. Fra Nepper-Christensen og Nielsen (17)

På grundlag af Goodier's teori (19) for en enkelt kugle i en uendelig matrix, påvirket i det fjerne af den eenaksede spænding, T, kan følgende spændinger udledes. Alle Poissontal er sat til .2.

Matrixspændinger lige ved kuglen:

$$\sigma_r^m = T(1+\cos 2\theta) \frac{n}{n+1} \quad (28)$$

$$\sigma_\theta^m = \frac{T}{4} \frac{3+n+(n-5)\cos 2\theta}{n+1} \quad (29)$$

$$\sigma_\psi^m = \frac{T}{4}(1+\cos 2\theta) \frac{n-1}{n+1} \quad (30)$$

$$\tau^m = -T \sin 2\theta \frac{n}{n+1} \quad (\text{andre } \tau = 0) \quad (31)$$

Samtidigt er selve kuglens spændinger givet ved,

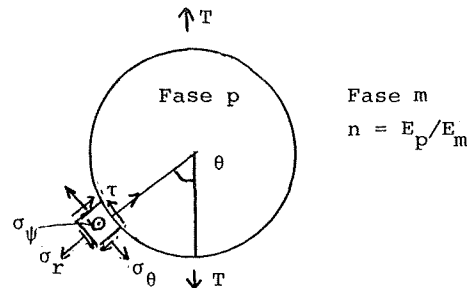
$$\sigma_r^p = T(1+\cos 2\theta) \frac{n}{n+1} \quad (32)$$

$$\sigma_\theta^p = T(1-\cos 2\theta) \frac{n}{n+1} \quad (33)$$

$$\sigma_\psi^p = 0 \quad (34)$$

$$\tau^p = -T \frac{n}{n+1} \sin 2\theta \quad (\text{andre } \tau = 0) \quad (35)$$

Disse spændinger gælder for hele partiklen, uafhængig af koordinat r.



Figur 21.

For en kugle i et kornarmeret materiale fås et tilnærmet udtryk for de spændinger, der går ind i partiklen (σ_r og τ) ved at erstatte n med E_p/E^+ , se (20). Dvs. vi betragter matrixen som selve kompositmaterialet, for hvilket Youngmodulen E^+ kendes fra tidligere givne udtryk. Vi får.

$$\sigma_r = T(1+\cos 2\theta) \frac{1}{1+E^+/E_p} \quad (36)$$

$$\tau = -T \sin 2\theta \frac{1}{1+E^+/E_p} \quad (37)$$

Jævnfør (20) kan tilnærmelse forbedres ved multiplikation med

$$f = \frac{1+E^+/E_p}{1+c_p} \frac{n}{A+n} ; \quad A \approx \frac{1-c_p}{1+c_p} \quad (38)$$

Herved fås ligningerne 43,46,39 og 42. Det forekommer sandsynligt, at de andre spændinger kan forbedres i samme forhold.

D.v.s. ved multiplikation af lign. 29,30,33 og 34 med lign.43/lign. 32 = $(n+1)/(1+c_p)/(A+n)$. Herefter bliver for det enkelte korn i kompositmaterialet:

$$\sigma_r^m = T(1+\cos 2\theta) \frac{n}{(1+c_p)(A+n)} \quad (39)$$

$$\sigma_\theta^m = \frac{T}{4} \frac{3+n+(n-5)\cos 2\theta}{(1+c_p)(A+n)} \quad (40)$$

$$\sigma_\psi^m = \frac{T}{4}(1+\cos 2\theta) \frac{n-1}{(1+c_p)(A+n)} \quad (41)$$

$$\tau^m = -T \cdot \sin 2\theta \cdot \frac{n}{(1+c_p)(A+n)} \quad (42)$$

$$\sigma_r^p = T(1+\cos 2\theta) \frac{n}{(1+c_p)(A+n)} \quad (43)$$

$$\sigma_\theta^p = T(1-\cos 2\theta) \frac{n}{(1+c_p)(A+n)} \quad (44)$$

$$\sigma_\psi^p = 0 \quad (45)$$

$$\tau^p = -T \cdot \sin 2\theta \cdot \frac{n}{(1+c_p)(A+n)} \quad (46)$$

Som før gælder partikelspændingerne uanset koordinat r. Ved en fleraksede påvirkning af kompositmaterialet med σ_{ij}^x er faserens gennemsnitlige spændinger efter (20) bestemt tilnærmet ved

$$\sigma_{ij}^p = \frac{2}{1+c_p} \frac{n}{A+n} \sigma_{ij}^+ ; \quad \sigma_{ij}^m = \frac{1}{1+c_p} \frac{1+n}{A+n} \sigma_{ij}^+ \quad (47)$$

Eksempel på beregning af begyndende brud:

Lad os sige, at vi ved at anvende forskellige relevante brudkriterier på de ovenfor givne spændinger, er nået frem til at kontaktzonen er det farligste sted. Vi antager, at kontaktzonen mister sin bæreevne, når Coulombs brudkriterium forceres. D.v.s. når

$$\tau > C + \sigma \tan \phi \quad (48)$$

hvor C, ϕ er kontaktzonens kohæsion henholdsvis friktionsvinkel. Indsætter vi den ydre spænding $T = S$ (trykspænding) i ligningerne 39 og 42, og derpå anvender disse spændinger i brudbetingelsen får vi

$$S > \frac{C(1+c_p)(A+n)}{n(\sin 2\theta - \operatorname{tg}\phi(1+\cos 2\theta))} \quad (49)$$

Minimering af dette udtryk giver bæreevnen, når kontaktzonen bryder. Det farligste sted findes at være bestemt ved

$$\operatorname{tg} 2\theta = -1/\operatorname{tg}\phi \quad ; \quad \theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(-1/\operatorname{tg}\phi) + \frac{\pi}{2} \quad (50)$$

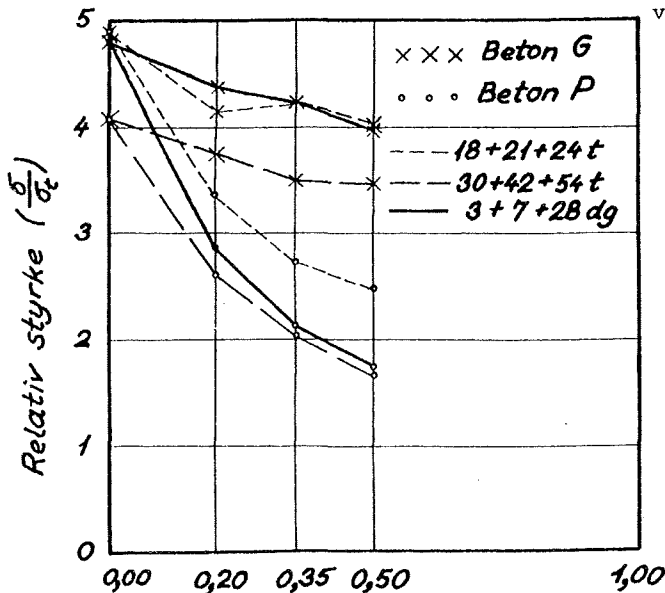
der indsat i lign. 49 giver bæreevnen

$$S_{br} = \frac{C(1+c_p)(A+n)}{n} \frac{1+\sin\phi}{\cos\phi} \quad ; \quad A = \frac{1-c_p}{1+c_p} \quad (51)$$

Antages, at kompositmaterialet er beton. Mørtlen er matrixen. Fraktionen af større sten svarer til $c_p = 0.5$. Stivhedsforholdet mellem sten og mørtel sættes til $n = 2$. For kontaktzonen antages kohæsionen at være $C = 15 \text{ kp/cm}^2$, mens friktionsvinklen sættes til $\phi = 30^\circ$.

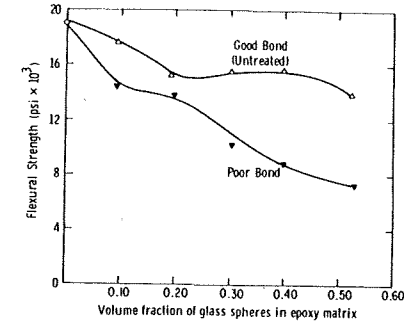
Dette eksempel giver at brudet indtræder ved $\theta = 60^\circ$ med brudspændingen $S_{br} = 45.5 \text{ kp/cm}^2$. Med de givne forudsætninger er denne spænding lig betonens linearitetsgrænse.

Det bemærkes, at S_{br} aftager med tiltagende stivhedsforhold mellem sten og mørtel, men vokser med større og større stenkonzentration. Det endelige brud forårsages ved een eller flere andre mekanismer - ofte således, at den maximale bæreevne aftager med voksende stenkonzentration, se figur 22. Korninterferens vil fremme dette fænomen.



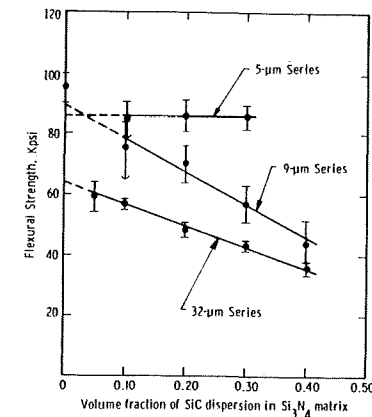
Figur 22. Relativ betontrykstyrke som funktion af glaskuglekonzentration. x betegner kugler med god vedhæftning - o betegner kugler med ingen vedhæftning (plastbelagte). Fra Nepper-Christensen og Nielsen (17).

Figur 23 viser lignende forhold som de, der er vist i figur 22. Figur 24 og 25 viser, at mindre og mindre partikler virker styrkebefordrende. Dette er i overensstemmelse med figur 19, der angiver, at revneeffekten aftager med aftagende kornstørrelse.



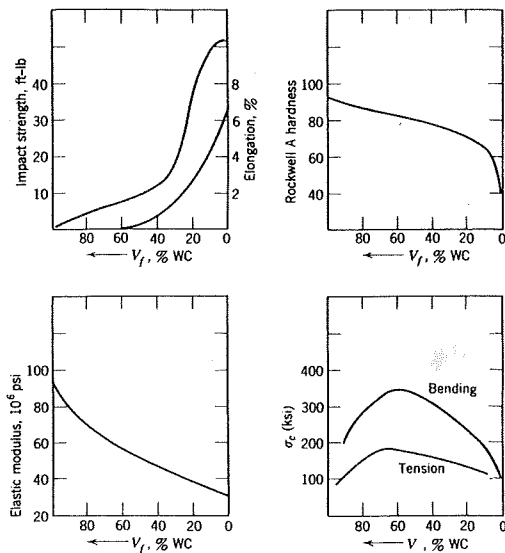
Strength versus volume fraction of a glass sphere dispersion within an epoxy matrix. Two curves are shown: one where the spheres were pretreated with a debonding agent to produce a poor bond and the other, untreated glass spheres (Sahu and Broutman, 1971). (21).

Figur 23.



Strength versus volume fraction of different particle-size SiC dispersions within a dense Si_3N_4 matrix (Lange, 1973). (22).

Figur 24.



Mechanical properties of WC-Co composites as a function of the volume fraction of WC particles V_f having approximately constant size $d = 2 \mu$. After J. Gurland et al (23, 24).

Figur 25.

AFSLUTNING

Til slut skal nævnes, at de elasticitetsteoretiske løsninger, der er blevet givet, egentligt er løsninger på potentialteoretiske problemer - og dermed næsten uændrede kan anvendes til bestemmelse af kompositmaterialers ledningsevne (varme, elektricitet, fugt), se f.eks. (28).

Forhåbentlig har det foreliggende notat bidraget til at øge læserens interesse for kompositmaterialer. Disse materialer vil ganske sikkert - gennem den øgede nødvendighed for genbrug - få en stadig voksende betydning i fremtiden.

LITTERATUR

1. Paul, B.: Trans. AIME, 218(1960), 36.
2. Hashin, Z. and Shtrikman, S.: J. Mech. Phys. Solids 11 (1963), 127.
3. Hashin, Z.: Chapter 14 in "Ceramic Microstructures", John Wiley & Sons, New York 1968.
4. Coble, R. L. and Kingery, W. D.: J. Am. Ceramic Soc. 39 (1956), 377.
5. Hashin, Z.: J. Appl. Mech., Trans. ASME 29E(1962), 143.
6. Hashin, Z. and Rosen, B. W.: J. Appl. Mech. 31(1964), 223.
7. Nielsen, L. F.: "Lidt om Kompositmaterialer". Laboratoriet for Bygningsmaterialer, DTH. Rapport 51/77(1977).
8. Nielsen, L. F.: Cement and Concrete Res. 3(1973), 751.
9. Nielsen, L. F.: "Elastic Properties of Two Phase Materials". Paper presented at the conf. "The Rheology and Rheometry of Multiphase Materials", Plymouth, Devon, England 1978.
10. Budiansky, B.: Mech. Phys. Solids 13(1965), 223.
11. Nielsen, L. F.: Acta Polytechnica Scandinavica, Ph73(1970)
12. Ishai, O.: J. Am. Concrete Inst., Proc. 58(1961), 611.
13. Kelly, A. and Tyson, W. R.: J. Mech. Phys. Solids 13(1965), 229.
14. Holister, G. S. and Thomas, C.: "Fibre Reinforced Materials". Elsevier Publ. Comp., London 1966.
15. Kelly, A. and Smith, G. C. and Kennedy, A. J.: "Composite Materials". London Iliffe Books Ltd., 1966.
16. Krenchel, H.: "Fibre Reinforcement". Akademisk Forlag, Copenhagen 1964.
17. Nepper-Christensen, Nielsen, T. P. H.: "Vedhæftningen mellem sten og mørtel og dens indflydelse på styrken af beton". Betonforskningslaboratoriet, Karlstrup. BFL intern rapport nr. 169(1968). Se også J. Am. Concrete Inst., Proc. 66(1969), 69.
18. Buyukozturk, O., Nilson, A. H. and Slate, F. O.: J. Am. Concrete Inst., Proc. 68(1971), 590.
19. Goodier, J. N.: J. Appl. Mech., Trans. ASME 55APM(1933), 39.
20. Nielsen, L. F.: Cement and Concrete Res. 4(1974), 31.
21. Sahu, S. and Broutman, L. J.: St. Louis Symp. Advan. Composites. 5th april 1971.

22. Lange, F. F.: J. Am. Ceramic Soc. 56(1973), 445.
23. Bardzil, P. B. and Gurland, J.: Trans. AIME 203(1955), 311.
24. Nishmutzu, C. and Gurland, J.: Trans. ASM 52(1960), 469.
25. Cohen, L. and Ishai, O.: J. Composite Mat. 1(1967), 390.
26. Binns, D. B.: "Science of Ceramics", (G.H. Stewart, ed.), Vol. 1(1962), 315. Academic Press, New York 1962.
27. Hansen, T. C.: Swedish Cement and Concrete Inst., Stockholm, Bulletin 33(1958).
28. Hale, D. K.: J. Materials Science 11(1976), 2105. (Review on "The physical Properties of Composite Materials").
29. WIREX-Stahlfaserbeton. Brochure fra Arbed-Felten & Guilleaume S.A., Köln, 1976.

SUPPLERENDE LITTERATUR

Generelt

- a. Broutman, L. J. and Krock, R. H. (ed): "Composite Materials" Vol. 1 - 8. Academic Press, New York 1974.
- b. Holliday, L. (ed): "Composite Materials". Elsevier Publ. Comp., London 1966.

Laminater og fiberarmerede materialer

- c. Dietz, A. G. H.: "Composite Engineering Laminates". The MIT Press, Massachusetts Inst. Technology, Cambridge, Massachusetts 1969
- d. Rosen, B. W. (ed.): Composite Materials. North Atlantic Treaty Organization. AGARD-Publication LS-55(1972).
- e. Rosen, B. W.: Composites (1973), 16.
- f. Bäcklund, J.: Kompositmekanik - en introduktion til fiberkompositers hållfasthetslära. Inst. för Konstruktions- och Produktionsteknik. Linköping Universitet, Sverige, 1979.